

【つまづきやすいポイント】

・実数は以下のように分類することができ、それぞれ意図・意味がある。しっかり理解しよう。

Core 実数の分類

<有 理 数>		<無 理 数>
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ など…	整 数 $\dots, -2, -1, 0$ 自然数 $1, 2, 3, \dots$	$\sqrt{2} = 1.414213\dots$ $\sqrt{3} = 1.732050\dots$ $\pi = 3.141592\dots$ など… ※有理数同士の加減乗除で導くことのできない数

**例題
1**

次の数の中を有理数と無理数に分類しなさい。また、有理数のうち整数と自然数はどれか、それぞれ選びなさい。

【知識・理解】

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ 0 ⑤ -2 ⑥ 3π ⑦ 0.7

解答と解説

すべての実数は有理数か無理数かのいずれかに分類される（例外はない）。

また、有理数とは、有理数同士の計算（たとえば整数 ÷ 整数、整数 + 整数など）で得られる数、無理数とはそれ以外の数のことをいう。

したがって、上記①～⑦を分類すると以下のようになる。

有理数 … ① ③ ④ ⑤ ⑦

無理数 … ② ⑥（有理数で答えたもの以外すべて無理数である）

直感的な理解としては、 $\sqrt{\quad}$ や π など特殊な記号を用いなくても表現できる数が有理数である！
※だから、当然「整数」も有理数だ！

Check!!

また、有理数の中でも特に分数や小数の形をとらなくても表現できる数を整数といい、整数の中でプラスであるものを自然数というので、

整 数 … ① ④ ⑤

自然数 … ①

この問題で、有理数の中に整数や自然数があることを再確認しよう！

Check!!

【解答】

有理数 … ① ③ ④ ⑤ ⑦ 無理数 … ② ⑥
 整 数 … ① ④ ⑤ 自然数 … ①

演習
1-1

次の数の中を有理数と無理数に分類しなさい。また、有理数のうち整数と自然数はどれか、それぞれ選りなさい。 **【知識・理解】**

- ① 3 ② 2.5 ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ -17 ⑥ π ⑦ 0

演習
1-2

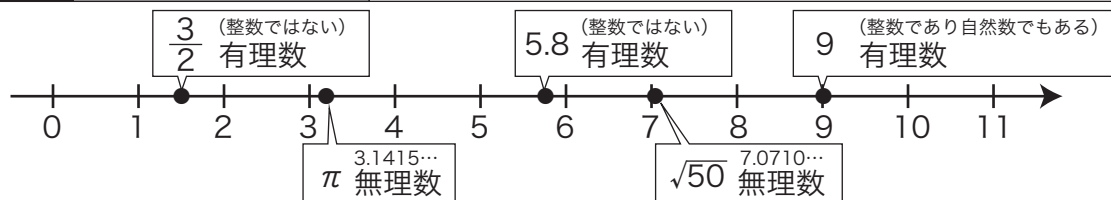
以下に示す数値のうち、その値を正確に表現するために実数の範囲として無理数まで拡張する必要があるものはどれか、該当するものをすべて選りなさい。 **【数学的な見方や考え方】**

- ① 1辺の長さが3である正方形の面積
② 半径が3である円の面積
③ 1辺の長さが3である正方形の対角線の長さ
④ 半径が3である円の周囲の長さ

【つまづきやすいポイント】

・すべての実数（有理数も無理数も）は数直線上の点として表現できる。

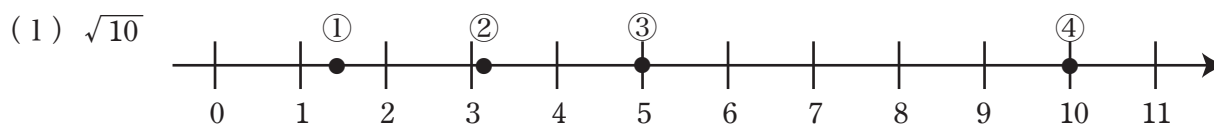
Core 数直線と実数の対応



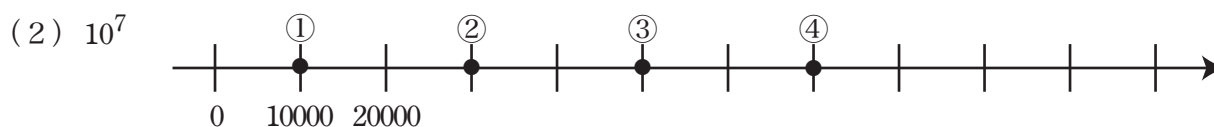
例題 2

以下の各数について、数直線上に正しく示されているのはどれか、それぞれ選びなさい。

【数学的な見方や考え方】



⑤ この中には該当する点がない



⑤ この中には該当する点がない

解答と解説

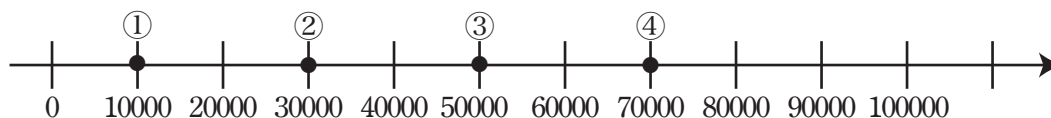
Check!!

- (1) $\sqrt{10}$ は $\sqrt{9}$ と $\sqrt{16}$ の間の数である
 $\parallel$
 $\sqrt{10}$ は 3 と 4 の間の数である
 であるから、該当する点は②である

$\sqrt{\quad}$ のおおよその数が知りたいときは…
 その近くにある整数ではさみます。
 たとえば今回の場合、
 $\sqrt{10}$ は、 $1=\sqrt{1^2}$, $2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$, $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$
 より大きいことがわかる一方で、
 $4=\sqrt{4^2}=\sqrt{16}$ より小さいこともわかるので、
 3と4の間に数があると判明します。
 (※この詳細は、学び直し **例題4** を参照)

- (2) $10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
 $= 10000000$ (1千万)

であり、問題の数直線に目盛りをつけ加えると



であるから、⑤該当する点がない ことがわかります。

Check!!

たとえば、1 と 100 と 10000 と 10000000 を同じ数直線上に表したいとしましょう。ところが、例題の(2)で確認したとおり、仮に 10000 を1目盛にした数直線を用いても 10000000 はこのページでは書けません（もちろんものすごく大きな紙を用意して、そこに書いてあげることはできます）。

逆に、10000000 や桁を1つ落とした 1000000 を1目盛とした数直線を用意した場合、大きな数は表せますが、小さい数（1 や 100 など）を表すのは大変です。

では、大きな数と小さい数を同じ数直線上に同時に表現したいとき（理科の現場などでよく登場します）どのようにしたらいいのでしょうか。ちなみに、その解決は数学Ⅱの「対数」で学習します。

【解答】

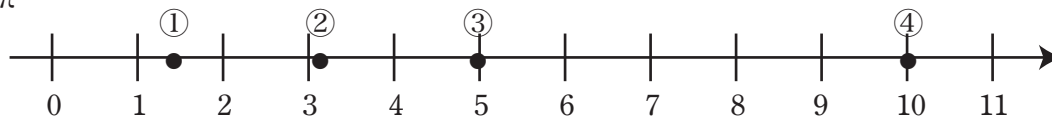
- (1) ② (2) ⑤

演習
2-1

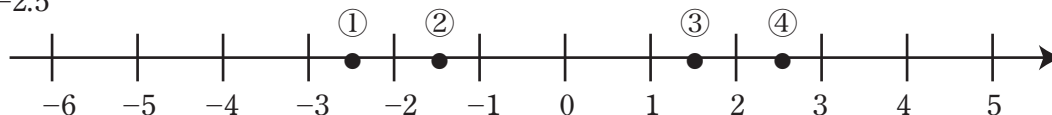
以下の各数について、数直線上に正しく示されているのはどれですか、それぞれ選びなさい。

【数学的な見方や考え方】

(1) π



(2) -2.5



演習
2-2

次の座標を数直線上に図示しなさい。

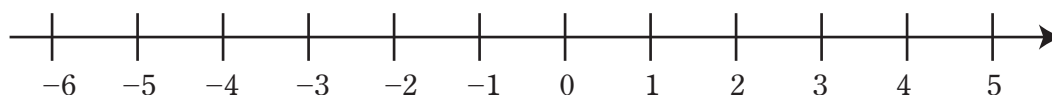
【数学的な技能】

(1) A (5)

(2) B (-3.5)

(3) C ($\sqrt{2}$)

(4) D ($\frac{1}{4}$)



【つまづきやすいポイント】

・根号を含む計算では行ってよいこと，行ってはいけないことがあります。確認しておこう。

Core $\sqrt{\quad}$ を含む計算のルール

行ってよい

$$\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B}, \quad \sqrt{A} \div \sqrt{B} = \sqrt{A \div B}$$

$$\bullet \sqrt{A} + \blacktriangle \sqrt{A} = (\bullet + \blacktriangle) \sqrt{A}$$

$$\bullet \sqrt{A} - \blacktriangle \sqrt{A} = (\bullet - \blacktriangle) \sqrt{A}$$

行ってはいけない

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{A+B}, \quad \sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{A-B}$$

$\sqrt{\quad}$ の中をマイナスにする

例題
3

次の計算をしなさい。

【数学的な技能】

(1) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - \sqrt{3}$

解答と解説

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= (1+3)\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Check!!

$\sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2}$
(文字で1を省略した
のと同じ状況)

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - \sqrt{3} \\ &= (2-1)\sqrt{3} + 3\sqrt{5} \\ &= \sqrt{3} + 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Check!!

$$\sqrt{3} = 1 \times \sqrt{3}$$

※ $\sqrt{\quad}$ を含んだ数は原則として，文字と同じように計算することができます。

Check!!

$$\begin{array}{l} \text{イメージ} \quad 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - \sqrt{3} = (2-1)\sqrt{3} + 3\sqrt{5} = \sqrt{3} + 3\sqrt{5} \\ \quad \quad \quad 2a + 3b - a = (2-1)a + 3b = a + 3b \end{array}$$

ですから，文字で行ってはいけなかったことは， $\sqrt{\quad}$ を含む数の計算でも行ってはいけません。たとえば，上で示した計算について， $\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ を無理やり計算（ $\sqrt{8}$ などにする）したりすることはできません。

では，「文字の計算とすべて同じですか」と言われたら，そうとも言い切れないのが $\sqrt{\quad}$ の難しいところです。たとえば， $\sqrt{\quad}$ の中身は，小さな値に直すことができます場合があります（学び直し **例題3** 参照）。また，分母に $\sqrt{\quad}$ が残っている場合は，分子に移動させることが多くあります（数と式 **例題5** 参照）。該当する例題をチェックしてみましょう。

【解答】

(1) $4\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$

演習
3-1

次の計算をなさい。

【数学的な技能】

(1) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{5} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

演習
3-2

$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$, $\sqrt{6}=2.449$ として以下の値を具体的に求め, () 内に示したことを実際に確認しなさい。

【数学的な見方や考え方】

(1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

(これは $\sqrt{5}=2.236$ に一致しない)

(2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(これは $\sqrt{1}=1$ に一致しない)

(3) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$

(これは $\sqrt{6}=2.449$ にほぼ一致する)

【つまづきやすいポイント】

・平方根のかけ算について、文字式の場合と異なる点を改めて整理しよう！

Core $\sqrt{\quad}$ の計算と文字式の計算の異なる点

- ・基本的に、文字式と同様の計算ができる。
(つまり文字式で用いる展開公式等がそのまま使える)
- ・かけ算した後に、 $\sqrt{\quad}$ の中の数が簡単になることがある
のが文字式の計算と異なる部分である。

$A \geq 0, B \geq 0$ のとき,
 $\sqrt{A^2} = A, \sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$
 2乗の形は $\sqrt{\quad}$ の外に出すことができる。

**例題
4**

次の計算をなさい。

【数学的な技能】

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

(2) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

(3) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 1)$

解答と解説

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$$= \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$

$$= 3 + 2\sqrt{3 \times 2} + 2$$

$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

(2) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

$$= \sqrt{5}^2 - 2^2$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1$$

Check!!

乗法公式①

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

※ a を $\sqrt{3}$, b を $\sqrt{2}$ に置き換えている！

Check!!

乗法公式②

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

※ a を $\sqrt{5}$, b を2に置き換えている！

※① 行ってよいこととダメなこと

OK! $\rightarrow \sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B}$

ダメ! $\rightarrow \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{A+B}$

※② $\sqrt{\quad}$ は2乗で消える！

$$\sqrt{A}^2 = A$$

(3) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 1)$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + 3 \times \sqrt{2} + 3 \times 1$$

$$= 2 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3$$

$$= 5 + 4\sqrt{2}$$

Check!!

乗法公式③

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

を利用して展開することもできます

※ ここでは分配法則を使っています

【解答】

(1) $5 + 2\sqrt{6}$ (2) 1 (3) $5 + 4\sqrt{2}$

演習
4-1

次の計算をなさい。

【数学的な技能】

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$

(2) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3)$

(3) $(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 3)$

演習
4-2

次の計算をなさい。

【数学的な技能】

(1) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$

(2) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

(3) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

演習
5-1

次の数の分母を有理化しなさい。

【数学的な技能】

(1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

演習
5-2

次の分母を有理化しなさい。

【数学的な技能】

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

【つまづきやすいポイント】

- ・ある条件を満たす数やもの(要素)の集まりのことを集合といい、独特の記号・用語が登場する。
1つ1つ丁寧に確認していこう。

Core 集合に関する記号, 用語

①入っている(含まれている)

- ・ a は集合 A の要素である (a は集合 A に入っている, 属する) $a \in A$
- ・集合 B が集合 A に入っている (集合 B は集合 A の部分集合である) $B \subset A$

②入っていない(含まれていない, 含まれていない部分がある)

- ・ a は集合 A の要素ではない (a は集合 A に入っていない, 属していない) $a \notin A$
- ・集合 B は集合 A に入っていない (集合 B には集合 A に入らない部分がある) $B \not\subset A$

③集合間の関係

- ・集合 A と集合 B の和集合 (集合 A と集合 B を合わせた集合) $A \cup B$
- ・集合 A と集合 B の共通部分 (集合 A と集合 B の両方を満たす集合) $A \cap B$
- ・集合 A の補集合 (集合 A 以外の部分) $\bar{A}$

④特殊な状況

- ・集合 A は空集合である (集合 A を作ってみたが, 要素が1つも無い) $A = \phi$
- ・集合 A と集合 B は等しい (集合 A と集合 B に入っている要素がすべて同じ) $A = B$

例題
6

10 以下の自然数で作られる集合を全体集合 U とし, その中に部分集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ と部分集合 $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ を考える。

このとき, 以下に示した集合はどのような集合になるか答えなさい。

【知識・理解】

- (1) $\bar{A}$ (2) $A \cup B$ (3) $A \cap B$ (4) $\bar{A} \cap B$ (5) $\bar{A} \cup B$ (6) $\bar{A} \cap \bar{B}$

解答と解説

- (1) $\bar{A}$ は, A の補集合 (A に属さない, A 以外の部分) を示すので, $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- (2) $A \cup B$ は, A と B の和集合 (A と B を合わせた部分) を示すので, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
- (3) $A \cap B$ は, A と B の共通部分 (A と B の両方に含まれる部分) を示すので, $A \cap B = \{1, 7\}$
- (4) $\bar{A} \cap B$ は, $\bar{A}$ と B の共通部分を示すので, $\bar{A} \cap B = \{2, 4, 6\}$
- (5) $\bar{A} \cup B$ は, $\bar{A}$ と B の和集合を示すので, $\bar{A} \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$
- (6) $\bar{A} \cap \bar{B}$ は, $\bar{A}$ と $\bar{B}$ の共通部分を示す
ここで, $\bar{B} = \{3, 5, 8, 9, 10\}$ であるから, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{8, 10\}$

Check!!

直感的な解き方として, 以下にあげる方法はかなり有効! 一緒に考えてみよう!

(準備) 集合 A と集合 B に関する条件から, あらかじめ $\bar{A}$ と $\bar{B}$ を用意しておこう。

A	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	$\bar{A}$	$\{2, 4, 6, 8, 10\}$
B	$\{1, 2, 4, 6, 7\}$	$\bar{B}$	$\{3, 5, 8, 9, 10\}$

(解答) たとえば(2)…和集合について,

$A \cup B$
↓ ↓
 $\{1, 3, 5, 7, 9\} \{1, 2, 4, 6, 7\}$

と具体的に並べたときに, 今回登場した数字(要素)をすべて書き並べてあげればそれが和集合。
だから答えは, $\{1, 3, 5, 7, 9, 1, 2, 4, 6, 7\}$
を整理してあげて $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

(4)…共通部分の場合は,

$\bar{A} \cap B$
↓ ↓
 $\{2, 4, 6, 8, 10\} \{1, 2, 4, 6, 7\}$

と具体的に並べたときに, 両方に共通して登場した数字を答えてあげればそれが共通部分。
だから答えは, $\{2, 4, 6\}$

【解答】 (1) $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ (3) $A \cap B = \{1, 7\}$
(4) $\bar{A} \cap B = \{2, 4, 6\}$ (5) $\bar{A} \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$ (6) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{8, 10\}$

**演習
6-1**

10 以下の自然数で作られる集合を全体集合 U とし，その中に部分集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$ と部分集合 $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ を考える。

このとき，以下に示した集合はどのような集合になるか答えなさい。

【知識・理解】

(1) $\bar{A}$

(2) $A \cup B$

(3) $A \cap B$

(4) $A \cap \bar{B}$

(5) $\bar{A} \cup B$

(6) $\bar{A} \cup \bar{B}$

**演習
6-2**

10 以下の自然数で作られる集合を全体集合 U とし，その中に 10 以下の素数で作られる部分集合 A と，10 以下の奇数で作られる部分集合 B を考える。

このとき，以下に示した集合はどのような集合になるか答えなさい。

【知識・理解】

(1) A

(2) $\bar{B}$

(3) $A \cap B$

(4) $A \cup \bar{B}$

(5) $\bar{A} \cap B$

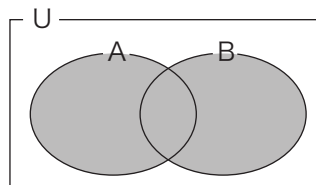
(6) $\bar{A} \cap \bar{B}$

【つまづきやすいポイント】

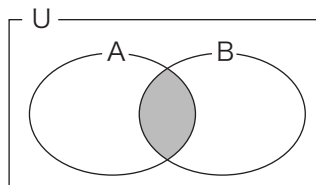
・集合の様子を表すのに、ベン図が非常に便利である。記号と共に集合の様子を確認しておこう。

Core 集合の様子（ベン図）

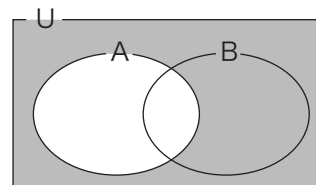
①集合の表す部分（例）



$A \cup B$
(A または B, A と B の和集合)

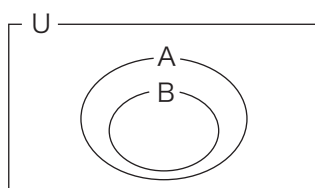


$A \cap B$
(A かつ B, A と B の共通部分)

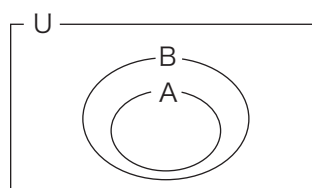


$\bar{A}$
(A の補集合)

②集合の包含関係（例）



$A \supset B, B \subset A$
(B は A に含まれる, B は A の部分集合である)



$B \supset A, A \subset B$
(A は B に含まれる, A は B の部分集合である)

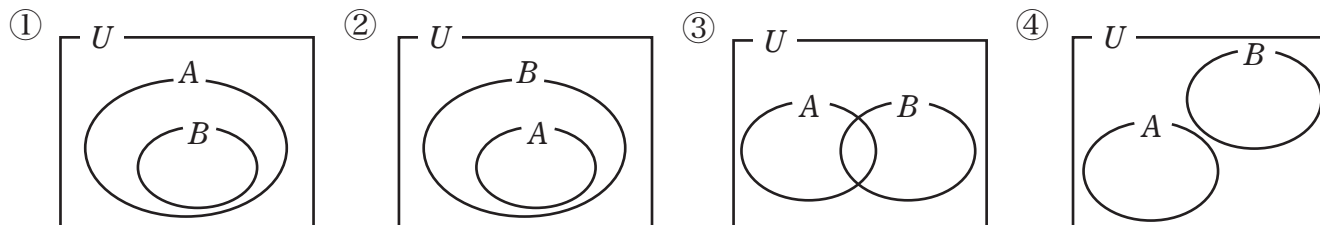
**例題
7**

集合に関する次の記載について、その状態を適切に表現している図、式をそれぞれ選びなさい。

【知識・理解】

- (1) 集合 A は集合 B の部分集合である (2) 集合 A の補集合に集合 B が含まれる

【図の選択肢】



【式の選択肢】

- ① $A \subset B$ ② $A \supset B$ ③ $\bar{A} \subset B$ ④ $\bar{A} \supset B$ ⑤ $A \subset \bar{B}$ ⑥ $A \supset \bar{B}$

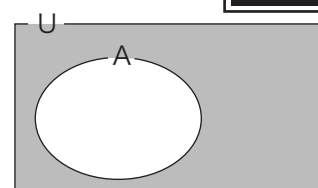
解答と解説

- (1) 集合 A が集合 B の部分集合であるということは「集合 A に属する要素はすべて集合 B に属している」ということ。

したがって、答えの図は②、式については例題 6 で確認したとおり①である。

- (2) 集合 A の補集合とは、集合 A 以外の部分全体のこと。その部分に集合 B が含まれる (=部分集合である) ので、答えの図は④、式については④である。

Check!!



A の補集合はここだ！

【解答】

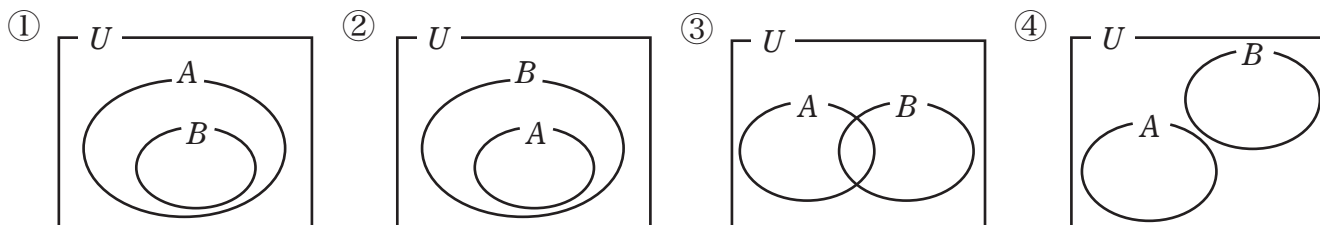
- (1) 図:② 式:① (2) 図:④ 式:④

演習
7-1

集合に関する次の記載について、その状態を適切に表現している図、式をそれぞれ選びなさい。 【知識・理解】

- (1) 集合 B は集合 A の部分集合である。
- (2) 集合 A は集合 B に含まれる。

【図の選択肢】



【式の選択肢】

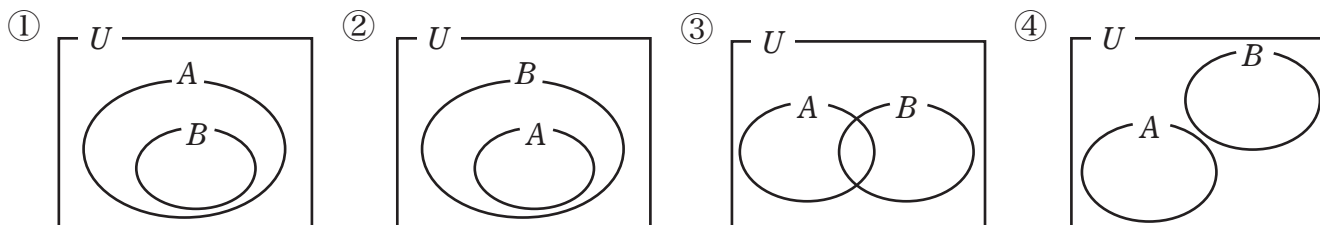
- ① $A \subset B$ ② $A \supset B$ ③ $\bar{A} \subset B$ ④ $\bar{A} \supset B$ ⑤ $A \subset \bar{B}$ ⑥ $A \supset \bar{B}$

演習
7-2

集合に関する次の記載について、その状態を適切に表現している図をそれぞれ選びなさい。 【数学的な技能】

- (1) 集合 A と集合 B の共通部分は空集合である。
- (2) 集合 A の補集合と集合 B の補集合の共通部分は集合 A の補集合に一致する。

【図の選択肢】



【つまづきやすいポイント】

・命題の真偽については、日常の感覚と若干異なる部分がある。その点をしっかり理解しよう。

Core 命題の真偽判定

- ・命題「 $A \Rightarrow B$ 」の意味は、「条件 A を満たすものは、例外なくすべて条件 B も満たす」ということ。
※したがって、この命題が正しいと判定されるには、1つでも例外があってはいけない(この例外を反例という)
- ・命題「 $A \Rightarrow B$ 」が正しいときを「真」、正しくないときを「偽」という。(つまり、反例があれば「偽」)
- ・命題「 $A \Rightarrow B$ 」について、「 $B \Rightarrow A$ 」を「逆」、「 $A \Rightarrow B$ 」を「裏」、「 $B \Rightarrow A$ 」を「対偶」といい、対偶の命題の真偽はもとの命題の真偽と必ず一致する。

例題
8

命題 「整数 a について、 a^2 が偶数ならば a は偶数である」を証明するために、その対偶の命題を作りたい。この対偶の命題を

$$\boxed{\text{ア}} \Rightarrow \boxed{\text{イ}}$$

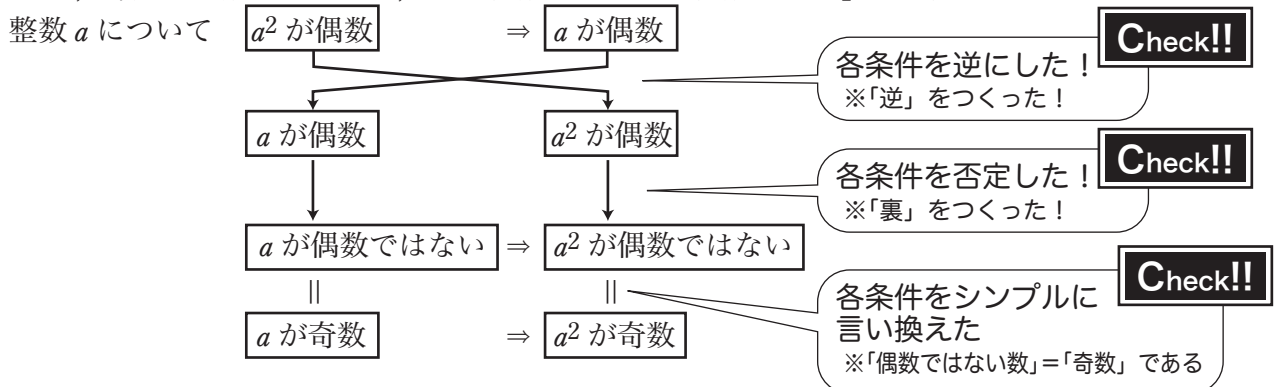
の形で表すとき、上記 $\boxed{\text{ア}}$ $\boxed{\text{イ}}$ に入る最も適切な条件を以下より選びなさい。

- ① a が偶数 ② a が奇数 ③ a^2 が偶数 ④ a^2 が奇数

【知識・理解】

解答と解説

対偶は、もとの命題の条件を逆にすることで行うことができる。
したがって、命題「整数 a について、 a^2 が偶数ならば a は偶数である」の対偶は



より、 $\boxed{\text{ア}}$ ② a が奇数 $\boxed{\text{イ}}$ ④ a^2 が奇数

Check!!

命題の対偶の真偽は一致するが、逆や裏に関しては一致するとは限らない！
このことを直感的に理解してみよう！

命題 北海道に住んでいる $\Rightarrow$ 日本に住んでいる を考えてみる。

意味：北海道に住んでいる人は、(例外なく全員)日本に住んでいる

これについては全員がこの条件に当てはまるので「真」の命題であると言える。

(北海道に住んでいながら、日本に住んでいないという人はいないはず！)

さて、この命題の「逆」「裏」「対偶」を考えてみよう。

各条件を逆にした！
※「逆」をつくった！

逆 日本に住んでいる $\Rightarrow$ 北海道に住んでいる

意味：日本に住んでいる人は、(例外なく全員)北海道に住んでいる

こういった例を反例といいます！

たとえば、日本に住んでいる人には東京に住んでいる人、京都に住んでいる人さまざまいるはず。もちろん、北海道に住んでいる人もいる。しかし、例外がある以上この命題は「偽」。

裏 北海道に住んでいない $\Rightarrow$ 日本に住んでいない

意味：北海道に住んでいない人は、(例外なく全員)日本に住んでいない

各条件を否定した！
※「裏」をつくった！

これについても、「北海道に住んでいない人」=「たとえば東京に住んでいる人」が考えられるけど、そういった人ももちろん「日本に住んでいる」。だから、この命題も「偽」。

対偶 日本に住んでいない $\Rightarrow$ 北海道に住んでいない

意味：日本に住んでいない人は、(例外なく全員)北海道に住んでいない

逆の否定をつくった！
※「対偶」をつくった！

ところが、対偶については意味合いが変わり、日本に住んでいない以上それは絶対に北海道に住むことができない。だから、この命題の真偽は「真」。対偶の真偽は一致する。イメージできたかな。

【解答】 $\boxed{\text{ア}}$ ② $\boxed{\text{イ}}$ ④

演習
8-1

以下の問いに答えなさい。

【知識・理解】

命題「整数 a について、 a^2 が 3 の倍数ならば a は 3 の倍数である」を証明するために、その対偶の命題を作りたい。この対偶の命題を

ア $\Rightarrow$ イ

の形で表すとき、上記 ア イ に入る最も適切な条件を以下より選びなさい。

- | | |
|-----------------|---------------------|
| ① a が 3 の倍数 | ② a が 3 の倍数ではない |
| ③ a^2 が 3 の倍数 | ④ a^2 が 3 の倍数ではない |

演習
8-2

次の命題の対偶を答えなさい。

【数学的な技能】

(1) 「 $\triangle ABC$ が正三角形であるならば、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である」

(2) 実数 x について「 $x > 2$ ならば $x > 0$ 」

(3) 実数 x, y について「 $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = 0$ かつ $y = 0$ 」

【つまづきやすいポイント】

- ・多項式の乗法では，次の乗法公式を用いて展開すると便利である。

Core 2次の乗法（展開）公式

乗法公式① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

乗法公式② $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

乗法公式③ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

乗法公式④ $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

例題
9

次の式を展開しなさい。

【数学的な技能】

(1) $(x+2)^2$

(2) $(x+4)(x-4)$

(3) $(x+2)(x-3)$

(4) $(3x-1)(x+2)$

解答と解説

(1) $(x+2)^2$

$= x^2 + 2 \times 2x + 2^2$

$= x^2 + 4x + 4$

(2) $(x+4)(x-4)$

$= x^2 - 4^2$

$= x^2 - 16$

Check!!

乗法公式①

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

※ aをx, bを2に置き換えている！

Check!!

乗法公式②

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

※ aをx, bを4に置き換えている！

(3) $(x+2)(x-3)$

$= x^2 + (2-3)x + 2 \times (-3)$

$= x^2 - x - 6$

(4) $(3x-1)(x+2)$

$= 3 \times 1 \times x^2 + (6-1)x - 1 \times 2$

$= 3x^2 + 5x - 2$

Check!!

乗法公式③

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

※ aを2, bを-3に置き換えている！

Check!!

乗法公式④

$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

※ aを3, bを-1, cを1, dを2に置き換えている！

Check !!

問題(4)については，公式の形が複雑であるため代入が大変！
 だから，1つ1つ分配法則で展開しても問題を解くスピードは大きく変わらないかもしれないね。(ただし，(1)～(3)は公式を利用した方が圧倒的に速い！)

(4) $(3x-1)(x+2) = 3x^2 + 6x - x - 2$
 $= 3x^2 + 5x - 2$

分配法則で展開した
 (見た目にも公式に代入した式と
 大差ない！)

【解答】

(1) $x^2 + 4x + 4$

(2) $x^2 - 16$

(3) $x^2 - x - 6$

(4) $3x^2 + 5x - 2$

**演習
9-1**

次の式を展開しなさい。

【数学的な技能】

(1) $(x+3)^2$

(2) $(x-4)^2$

(3) $(x+2)(x-2)$

(4) $(x-1)(x+4)$

(5) $(2x+1)(x+3)$

**演習
9-2**

次の式を展開しなさい。

【数学的な技能】

(1) $(x+2y)^2$

(2) $(x-\frac{2}{3})^2$

(3) $(x-\frac{5}{2})(x+\frac{5}{2})$

(4) $(x-3a)(x+2a)$

(5) $(4x+3y)(3x+4y)$

【つまずきやすいポイント】

・乗法公式の左辺と右辺を入れ替えると，因数分解の公式ができる。

Core 2次の因数分解の公式

公式① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

公式② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

公式③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

公式④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

例題
10

次の式を因数分解しなさい。

【数学的な技能】

(1) x^2-4x+4

(2) x^2-25

(3) x^2+5x+6

(4) $3x^2+7x+2$

解答と解説

(1) x^2-4x+4

$=x^2-2\times 2x+2^2$

$=(x-2)^2$

公式①

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

※ aをx, bを2に置き換えている！

Check!!

(2) x^2-25

$=x^2-5^2$

$=(x+5)(x-5)$

公式②

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

※ aをx, bを5に置き換えている！

Check!!

(3) x^2+5x+6

$=x^2+(2+3)x+(2\times 3)$

$=(x+2)(x+3)$

公式③

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

※ aを2, bを3に置き換えている！

(もちろん, 2と3を逆でもOK!)

Check!!

(4) $3x^2+7x+2$

$=(3x+1)(x+2)$

公式④

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

※ いわゆる「たすきがけ」の公式です。

(公式に当てはめるといより, 方法を理解しよう!)

Check!!

Check!!

解説に示したたすきがけの手法について。以下のように行います。

例： $3x^2+7x+2$ の因数分解（たすきがけ）

① $3x^2 + ④ 7x + ② 2 = (③ 3x + ① 1)(⑤ 1x + ⑥ 2)$

① かけて3 (x^2 の係数) になる組合せを書く

② かけて2 (定数項) になる組合せを書く

③ 3

① 1

② 2

⑤ 1

⑥ 2

③

1

6

7

1

6

7

1

6

7

一致！

※ 不一致なら①からやり直そう！ FIGHT！

③ ①と②で書いた数を×でつなぎ, かけ合わせる

④ ③で求めた2数を上下にたす。これが, 問題のxの係数(この場合は7)に一致していればOK

【解答】

(1) $(x-2)^2$

(2) $(x+5)(x-5)$

(3) $(x+2)(x+3)$

(4) $(3x+1)(x+2)$

**演習
10-1**

次の式を因数分解しなさい。

【数学的な技能】

(1) x^2+4x+4

(2) x^2-2x+1

(3) x^2-9

(4) $x^2+7x+12$

**演習
10-2**

次の式を因数分解しなさい。

【数学的な技能】

(1) $3x^2+5x+2$

(2) $2x^2+5x+2$

(3) $3x^2-4x-4$

(4) $6x^2+5x-4$

【つまづきやすいポイント】

・不等号の意味は次の表のとおりである。日本語の意味と合わせて確認しよう。

Core 不等号とその意味

不等号	例	意 味
$>$	$x > 5$	x は 5 より大きい (5 は入らない)
$<$	$x < 5$	x は 5 より小さい, x は 5 未満 (5 は入らない)
$\geq$	$x \geq 5$	x は 5 以上 (5 を含める)
$\leq$	$x \leq 5$	x は 5 以下 (5 を含める)

例題
11

以下の問いに答えなさい。

【知識・理解】

問1 ある数 x を 4 倍して 7 を加えた数は 15 より小さい。このことを正しく表している不等式は以下のうちどれか。最も適切なものを 1 つ選びなさい。

- ① $4x + 7 \leq 15$ ② $4x + 7 \geq 15$
③ $4x + 7 > 15$ ④ $4x + 7 < 15$

問2 次の不等式のうち、 $x=0$ と $x=1$ が共に解になっている不等式はどれか。適切な不等式を 1 つ選びなさい。

- ① $x < 1$ ② $x \geq 1$
③ $x > 1$ ④ $x \leq 1$

解答と解説

問1 ある数 x を 4 倍して 7 を加えた数 は 15 より小さい

||

x に 4 をかけ算して 7 をたし算した数

||

$4 \times x + 7$

||

< 15

「より小さい(大きい)」という表現にはその数は入らないことを意味している！

Check!!

と考えることができるので、
問題で示された不等式は ④ $4x + 7 < 15$

問2 $x=0$ と $x=1$ が共に解

||

「…が解である(…を満たす)」と言われたら…
それはその値を式に代入してもよいことを示す！

Check!!

不等式に $x=0$ と $x=1$ を代入しても式が矛盾しない (代入しても大丈夫)

不 等 式	$x=0$ を代入	$x=1$ を代入
① $x < 1$	$0 < 1 \cdots \text{OK}$	$1 < 1 \cdots \times$
② $x \geq 1$	$0 \geq 1 \cdots \times$	$1 \geq 1 \cdots \text{OK}$
③ $x > 1$	$0 > 1 \cdots \times$	$1 > 1 \cdots \times$
④ $x \leq 1$	$0 \leq 1 \cdots \text{OK}$	$1 \leq 1 \cdots \text{OK}$

よって、正解は ④ $x \leq 1$

【解答】

問1 ④

問2 ④

演習
11-1

以下の問いに答えなさい。

【知識・理解】

問1 ある数 x に 4 を加えて 7 倍した数は 15 以上である。このことを正しく表している不等式は以下のうちどれか。最も適切なものを 1 つ選びなさい。

- ① $x + 4 \times 7 \geq 15$ ② $x + 4 \times 7 > 15$
 ③ $7(x + 4) \geq 15$ ④ $7(x + 4) > 15$

問2 次の不等式のうち、 $x=0$ と $x=-1$ が共に解になっている不等式はどれか。適切な不等式を 1 つ選びなさい。

- ① $x < -1$ ② $x \geq -1$
 ③ $x > -1$ ④ $x \leq -1$

演習
11-2

実数 a と b が $a < b$ の関係を満たすとき、次の に入る適切な不等号を答えなさい。

【数学的な見方や考え方】

(1) $a + 3$ $b + 3$

(2) $a - 2$ $b - 2$

(3) $4a$ $4b$

(4) $\frac{a}{3}$ $\frac{b}{3}$

(5) $-2a$ $-2b$

(6) $3 - a$ $3 - b$

【つまづきやすいポイント】

・不等式が表す数の範囲を数直線で示すことが多い。ここではその約束事を確認しよう。

Core 数直線の約束事

数直線 数直線は右へ進めば大きな数、左へ進めば小さな数を表す

① 小

X ② 大

境界について

その値が範囲に含まれる場合（イコールがついている場合）は ●
// 含まれない場合（イコールがついていない場合）は ○ で表す

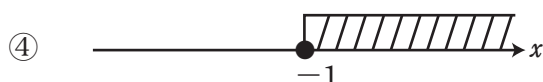
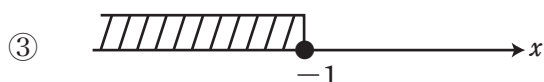
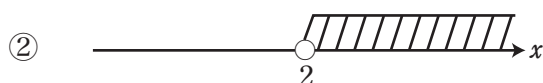
例題 1 2

次の不等式を満たす x の範囲として正しいものを下の選択肢から選びなさい。

【知識・理解】

(1) $x < 2$

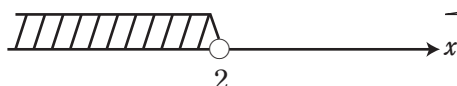
(2) $x \geq -1$



解答と解説

(1) 不等式 $x < 2$ は「 x は 2 より小さい」という意味であり、 x の値の範囲を示している。

したがって、そのことを数直線を用いると



のように表現される。

Check!!

数直線の○は、範囲にその値が含まれないことを示しています。
(この場合は2を含んでいないという意味になります)

(2) 不等式 $x \geq -1$ は「 x は -1 以上である」という意味であり、 x の値の範囲を示している。

したがって、そのことを数直線を用いると



のように表現される。

Check!!

数直線の●は、範囲にその値が含まれることを示しています。
(この場合は-1を含んでいるという意味になります)

Check!!

ちなみに ② は $x > 2$, ③ は $x \leq -1$ を表しています。

【解答】

(1) ① (2) ④

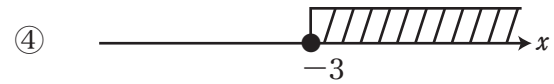
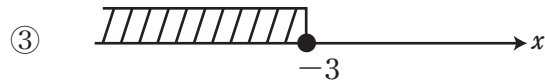
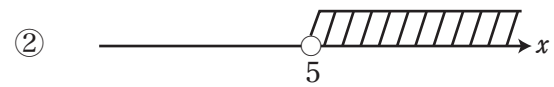
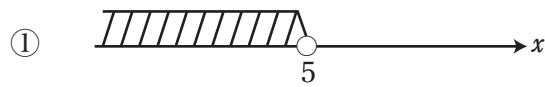
演習
12-1

次の不等式を満たす x の範囲として正しいものを下の選択肢から選びなさい。

【知識・理解】

(1) $x > 5$

(2) $x \leq -3$



演習
12-2

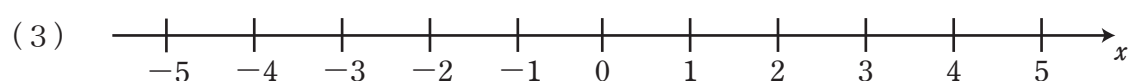
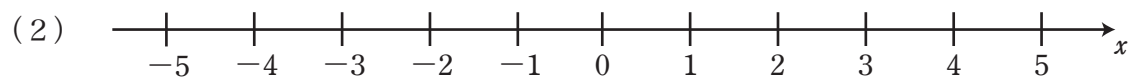
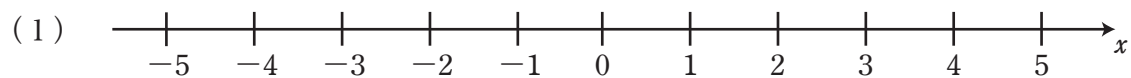
次の不等式を満たす x の範囲を下の数直線上に図示しなさい。

【数学的な技能】

(1) $x < 4$

(2) $x \geq -2$

(3) $x \leq \sqrt{3}$



【つまずきやすいポイント】

・不等式の変形においては、以下に示したとき不等号の向きが変わる。間違えないようにしよう。

Core 不等式の変形

① 両辺に同じ負の数をかける ② 両辺を同じ負の数で割る とき、不等号の向きが変わる。
(それ以外の場合は方程式のときと同じように式変形ができる)

例 ① $-\frac{1}{3}x \leq 2$ $x \geq -6$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$ 両辺に -3 をかけた	例 ② $-2x > 8$ $x < -4$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$ 両辺を -2 で割った
---	--	---------------------------	--

例題 13

以下は1次不等式の問題を解いたときの途中計算を示したものであるが、計算過程で誤った変形をしてしまったため、正しい解答が得られなかったものである。

$$\begin{array}{lcl}
 3(x+2) \leq 5x+2 & & \textcircled{1} \\
 3x+6 \leq 5x+2 & & \textcircled{2} \\
 3x-5x \leq 2-6 & & \textcircled{3} \\
 -2x \leq -4 & & \textcircled{4} \\
 x \leq 2 & &
 \end{array}$$

上記①～④のうち、どの段階で誤った変形をしてしまったため、正しい解答が得られなかったのか。変形のうち最も最初に間違ってしまった部分を1つ選びなさい。

【知識・理解】

解答と解説

不等式 $3(x+2) \leq 5x+2$ を丁寧に解くと以下のようになる。

$3(x+2) \leq 5x+2$ $3x+6 \leq 5x+2$ $3x-5x \leq 2-6$ $-2x \leq -4$ $x \geq 2$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	① 左辺を分配法則で展開した ② 左辺に文字、右辺に数を集めた(6と5xを移項した) ③ 左辺、右辺をそれぞれ計算した ④ 両辺を-2で割った(不等号の向きが変わる)
---	--	--

Check!!

したがって、問題で誤った変形をしていた部分は④である。

※ 負の数をかけたり、割ったりすると不等号の向きが変わる理由を直感的にとらえよう！

Check!!

たとえば、気温で考えるとものすごく当たり前の話です。

例 $10^{\circ}\text{C} < 20^{\circ}\text{C}$

10°C と 20°C を不等号で表すと上のようになります(10°C より 20°C の方が温かい)が、これを-1倍する(マイナスをつける)と

$-10^{\circ}\text{C} > -20^{\circ}\text{C}$

(両辺とも氷点下ではあるが、まだ -10°C の方が -20°C より温かい)
と、不等号の向きが変化する！つまり負の数をかけたり割ったりすると、大小関係が逆転する。

演習
13-1

次の不等式を解きなさい。

【数学的な技能】

(1) $x+2 > 5$

(2) $2x+3 \leq -4$

(3) $-3x > 6$

(4) $2x+3 \leq 4x-2$

演習
13-2

次の不等式を解きなさい。

【数学的な技能】

(1) $2(x+2) > 5$

(2) $-2x-1 \leq 3(x+3)$

(3) $\frac{x}{2}+3 < \frac{x}{3}-1$

(4) $\frac{x+3}{4} < \frac{x-1}{3}$

【つまづきやすいポイント】

・日常において、不等式が活躍する場面は非常に多い。ここではその基礎を確認しておこう。

Core 身近な事象への不等式の活用（注意点）

- ① 文章に出てくる「文字」と「数」の関係が 加法・減法・乗法・除法のどれにあたるかを文脈から判断する。問題の中には、使用しない数があることもあるので注意すること。
- ② 大小関係を表す言葉に注意する。

例	～以上	→ $\geq$	～より大きい	～を超える	→ $>$	
	～以下	→ $\leq$	～より小さい	～を超えない	～未満	→ $<$ など

**例題
14**

次の関係、状況を不等式で表しなさい。

【数学的な見方や考え方】

- (1) 重さ x kg の品物と、重さ 3 kg の品物の合計の重さは 10 kg 以上である。
- (2) 1冊 60円のノートを x 冊買った代金は 500円未満であった。

解答と解説

- (1) 重さ x kg の品物と、重さ 3 kg の品物の合計の重さ は 10 kg 以上である。

$$\begin{array}{c} \parallel \\ x+3 \text{ [kg]} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \geq 10 \text{ [kg]} \end{array}$$

であるから、答える不等式は $x+3 \geq 10$

大小関係を表す言葉！

～以上 → $\geq$

～未満 → $<$

Check!!

- (2) 1冊 60円 のノートを x 冊買った代金 は 500円 未満であった。

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 60 \times x \text{ [円]} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ < 500 \text{ [円]} \end{array}$$

であるから、答える不等式は $60x < 500$

Check!!

ちなみに…

- (1) 品物の重さは 7 kg 以上

- (2) 本を買った冊数は 8 冊以下

であることが不等式で求められます。

理由 立てた不等式を解いてみよう。

$$\begin{aligned} (1) \quad x+3 &\geq 10 \\ x &\geq 10-3 \\ x &\geq 7 \end{aligned}$$

より、不等式をそのまま読んで

x は 7 kg 以上

$$\begin{aligned} (2) \quad 60x &< 500 \\ x &< \frac{500}{60} \\ x &< \frac{25}{3} = 8.3333\cdots \end{aligned}$$

ここで、 x は本の冊数を表しているの、
 x は自然数。

したがって、 x は 8 冊以下。

※ $\frac{25}{3}$ 冊という冊数はありえないよね。
答え方に注意しよう！

【解答】

(1) $x+3 \geq 10$ (2) $60x < 500$

演習
14-1

次の関係，状況を不等式で表しなさい。

【数学的な見方や考え方】

(1) x 本のジュースを友だちに2本あげても，まだ10本以上残っている。

(2) 10000円で価格1980円の洋服は x 着まで買うことができる。

演習
14-2

次の関係，状況を不等式で表しなさい。

【数学的な見方や考え方】

(1) 平均時速 x km で車を2時間走らせると，50 km以上進むことができた。

(2) 定価 5000 円の品物を x %引きで購入することで，支払いを3000円未満にしたい。
(※消費税は考えないものとする)